工程統計-第三章

機率

第三章 ： 機率

- 機率為事件發生機會(或可能性)的大小，利用機率原理，我們可以針對不確定性事件發生的可能性賦予一個量化的數值。

3.1 簡單事件與樣本空間

(Elementary Events and the Sample Space）

隨機試驗之所有可能結果之集合，稱為樣本空間（Sample Space)。

硬幣出現正反面之樣本空間={正面，反面}

Pr[事件] = 事件集的大小/樣本空間大小

Pr[事件] = 0 不可能事件

Pr[事件] = 1 必然事件

互斥事件:兩事件沒有共同元素

3.2 複合事件之機率(Probabilities for Compound Events)

複合事件（Compound Event）係由兩種或兩個以上的簡單事件的組合。複合事件的運算最主要方式為

A:聯集（Union，或）

B:交集（Intersection，且）

C:機率加法法則（Addition Law）與

D:乘法法則（Multiplication Law）。

Example:

會員為大學部學生或主修電機系所學生的機率為（參考圖 6-3）

$$\Pr[\text{大學部學生 或 主修電機系所學生}]$$

$$= \Pr[UG \text{ 或 } EE] = Pr[UG \cup EE] = \frac{26}{38}$$

$$\Pr[\text{大學部學生 且 主修電機系所學生}]$$

$$= \Pr[UG \text{ 且 } EE] = \Pr[UG \cap EE] = \frac{5}{38}$$

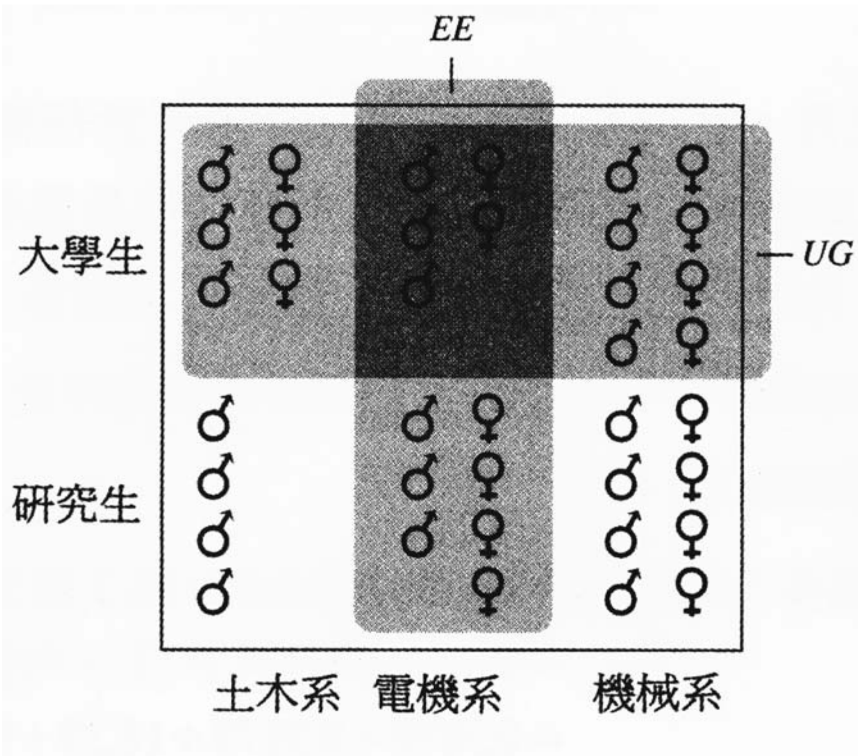

圖 6-3 隨機挑選學會會員之樣本空間

聯合機率（Joint Probability）

兩個或兩個以上的事件，透過交集（且）或聯集（或）所構成的事件之發生機率，

6.2.2 加法法則(The Additional Law)

互斥事件加法法則為下式：

$$\Pr[\ A \text{ 或 } B\ ]=\Pr[A]+\Pr[B]$$

3.2.3 加法法則通式(General Addition Law)

加法法則通式求得

$$\Pr[\ A \text{ 或 } B\ ]=\Pr[A]+\Pr[B] - \Pr[A\cap B]$$

3.2.4 餘事件之加法法則（Application to Complementary Events）

事件A的餘事件（Complementary Event），表示所有不屬於A的元素所組成的集合

$$\Pr[\ A \text{ 或非 } A\ ]=\Pr[A]+\Pr[\text{非}A]=1$$

$$\Pr[A]=1-\Pr[\text{非}A]$$

3.2.5 統計獨立（Statistical Independence）

當兩個事件間，任一事件發生與否皆不影響另一事件發生的機率，這項特性稱為統計獨立（Statistically Independent），此二事件為獨立事件（Independent Event）。

3.2.6 獨立事件之乘法法則

(The Multiplication Law for Independent Events)

當事件互為獨立時，聯合事件交集的機率為各事件機率之乘積，可表為下式：

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A \text{ 且 } B] = \Pr[A] \times \Pr[B]$$

3.3 條件機率（Conditional Probability）

條件機率（Conditional Probability）是指在另一事件發生的情況下，某一事件將發生的機率。

Pr[下雨 / 烏雲密佈] ＝ 0.90

表示當烏雲密佈發生後，下雨發生機率

（此時機率值為0.90）

在B事件發生下，為事件A發生的條件機率之公式定義如下

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \text{且} B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

3.3.1 獨立事件之條件機率

(Establishing Independence by Comparing Probabilities)

當$\Pr[A|B]=\Pr[A]$ 或$\Pr[B|A]= \Pr[B]$，

或 $\Pr[A\cap B]= P(A) \bullet P(B/A)=P(A) \bullet P(B)$，

則稱A與B兩事件為統計獨立(Statistically Independent)。

3.4 乘法法則、機率樹及抽樣

3.4.1 乘法法則之通式(The General Multiplication Law)

事件A與B是互依

$$\Pr[A\text{且}B]=\Pr[A\cap B]=\Pr[A]\times\Pr[B|A]$$

因為事件A∩B與B ∩ A是相同的，故

$$\Pr[A\text{且}B]=\Pr[B]\times\Pr[A|B]$$

3.4.2 機率樹狀圖(The Probability tree Diagram)

機率樹（Probability Tree），是一種分析事件發生過程及機率的圖解方法。利用機率樹可協助我們將聯合事件的關係清楚地表達出來。

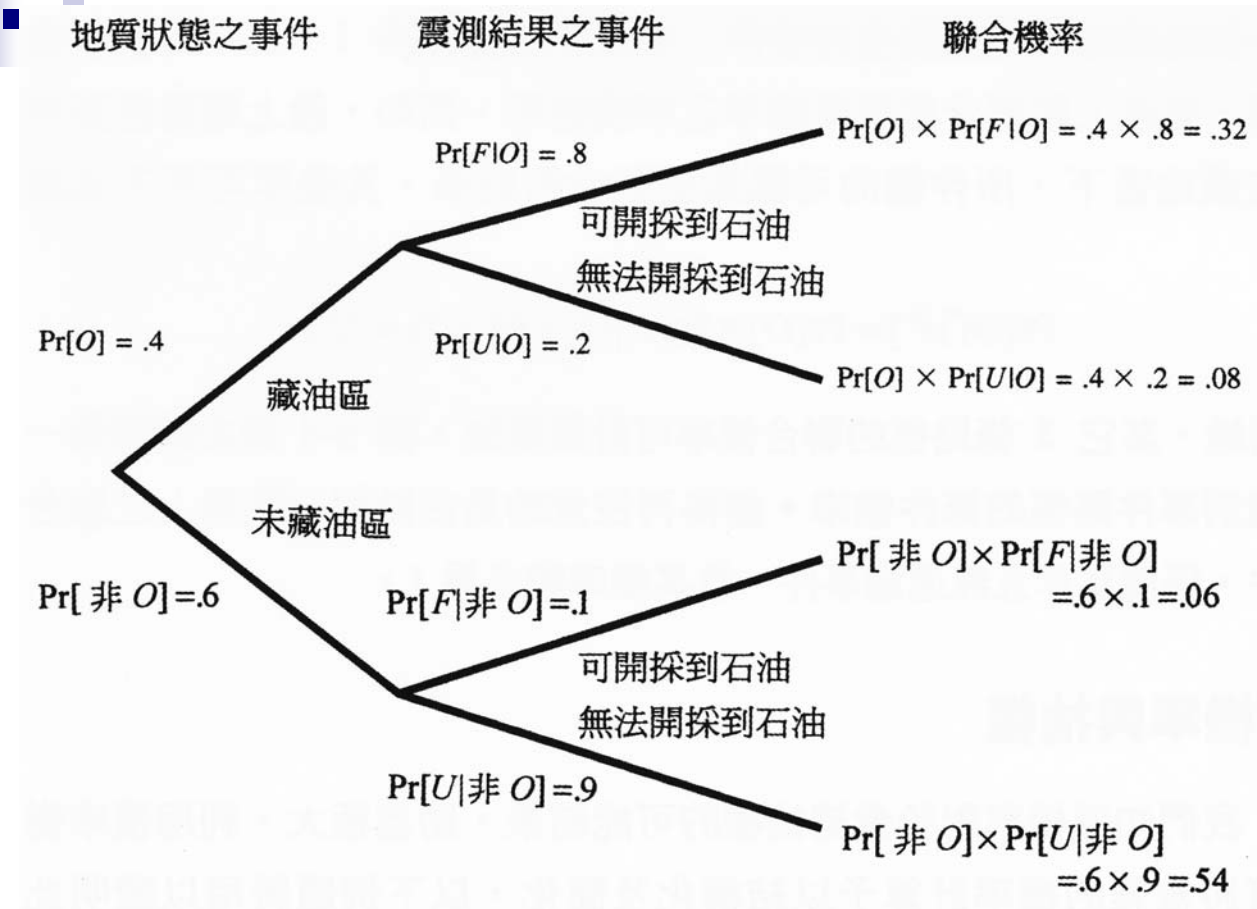

圖 6-4 石油探測的機率樹

3.5 系統可靠度的預測

(Predicting the Reliability of System)

機率的另一個重要的應用是在於以機率來預測整個系統的可靠度（Reliability）。

3.5.1 串聯系統 (System with Series Components)

串聯系統（Series System）是由系統中各單元或元件首尾相接，以使得所有單元均可完全正常運作的一種系統。

此乃因為各單元間列為獨立事件之故，即

$$R_s(t) = R_1(t)R_2(t)...R_n(t)$$

$$R_s(t) = 0.90(0.80)(0.95) = 0.684$$

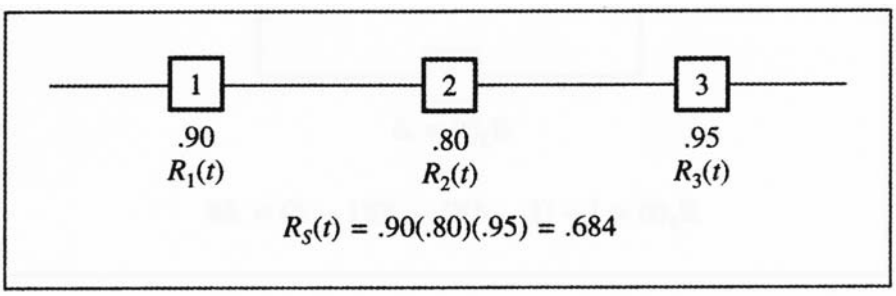

圖 6-7 串聯系統的邏輯圖

3.5.2 並聯系統(System with Parallel Components)

並聯系統（Parallel System）的特徵為：只要系統中有任一單元可保持正常運作，則此系統亦可繼續正常運作。

系統的可靠度等於1減去系統失效的機率。即

$$Rs(t) = 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)]...[1 - R_n(t)]$$

已知圖6-8各單元之可靠度為$R_t(t)=0.4$，$R_2(t)=0.5$，$R_3(t)=0.6$，故該系統的可靠度為

$$R_S(t) = 1-(1-0.4)(1-0.5)(1-0.6) = 1-0.12 = 0.88$$

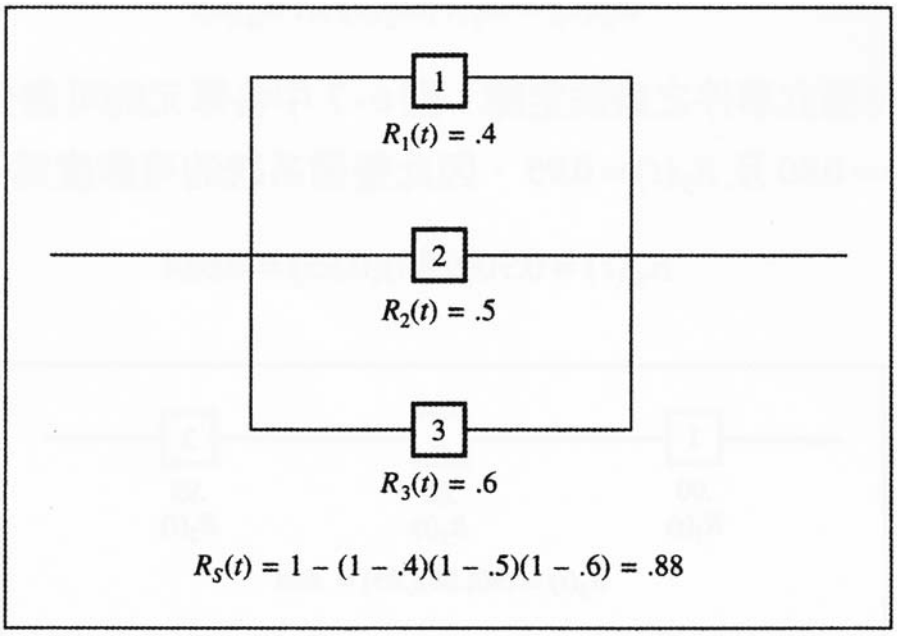

圖 6-8　並聯系統的邏輯圖

3.5.3 系統可靠度的提升 (Increasing System Reliability)

如何提高系統的可靠度，以確保系統的穩定度。通常常考慮的兩種方式為

(1)設法提高系統中各單元的可靠度。

(2)重複使用相同的單元（通常為可靠度較高者），使其構成一並聯的次系統，此時整個系統稱為重覆或多餘系統（Redundant System）。

$$1-[1-R_2(t)][1-R_{2'}(t)]=1-(1-0.8)(1-0.8)=0.96$$

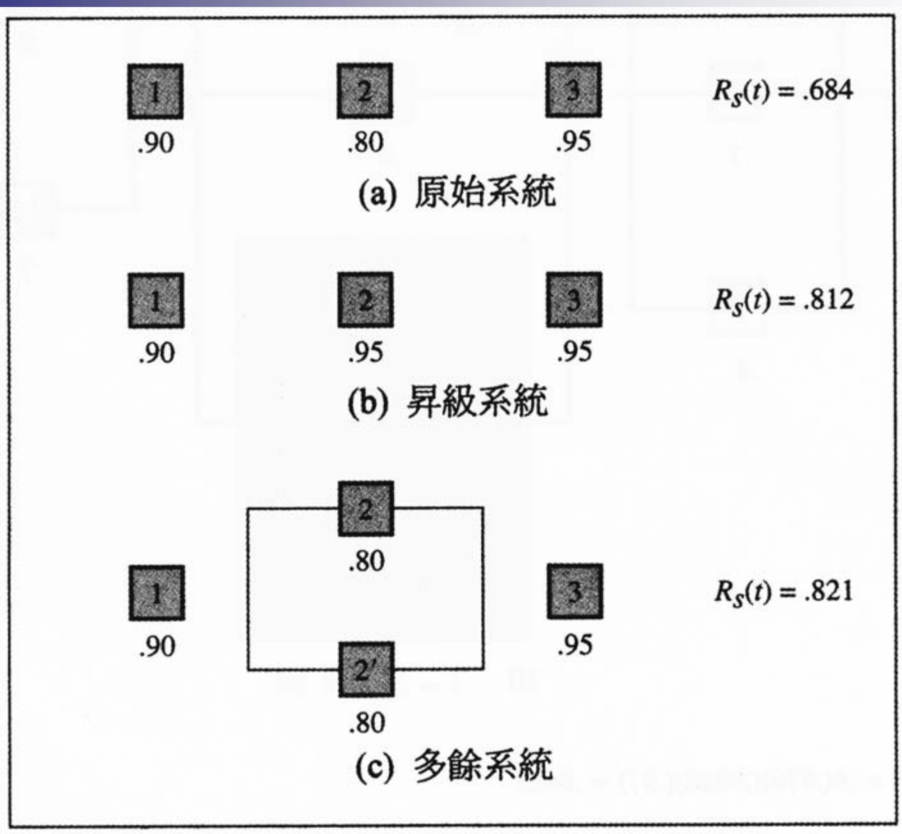

圖 6-9 兩種增加系統可靠度方式的示意圖