工 程 統 計

第八章　工 程 應 用之 重 要 機 率 分 配

8-1 卜瓦松 (Poisson) 分配

1. 卜瓦松分配通常應用

(1) 等候線的評估

(2) 可靠性的分析

2.卜瓦松分配與二像分配之關係

(1)二項分配關心的是在一固定系列實驗中成功發生的次數，且每一次試驗結果非成功即失敗

(2)卜瓦松分配關心的僅為事件數，其提供的是事件將會發生的機率。

卜瓦松事件之描述為在某特定時段或某特定區域之平均發生率。如某路段一小時發生3個事件，或七月時航行於北大西洋遭遇3個冰山的機率。

8-1 卜瓦松 (Poisson) 分配

二項分配關心的是在一固定系列實驗中成功發生的次數，且每一次試驗結果非成功即失敗；而卜瓦松分配關心的僅為事件數，如通過收費站的車輛數或衛星傳訊的失敗數等，其提供的是事件將會發生的機率。

◎卜瓦松過程

一個卜瓦松過程(Poisson Process)提出了描述發生在時間或空間中，以平均率的方式表現之事件。由於事件的發生是隨機的，圖8-1說明了其城市中街燈燒損的時間記錄。

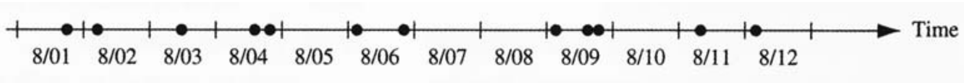

圖 8-1 燈燒損的時間紀錄

卜瓦松過程具有下列特性：

1. 事件在各段時間或特定區域之發生相互獨立，亦即卜瓦松過程為無記憶性。
2. 不論時間或區域之起點，在某一段考慮之時間或特定區域內，事件發生之機率已知及皆相同，且與區間的長短成比例。
3. 在極短或很小的區域，發生超過一次事件的情況微乎其微，亦即將時間或區域細分至極小單位，則事件不是只出現一次，就是不出現。

卜瓦松分配關心的是在某一段時間或某一特定區域中事件發生的次數。

指數分配（將於下一節介紹），其將二事件發生的間隔時間作為隨機變數。

◎卜瓦松機率

$$p(x;\lambda,t)=\Pr[X=x]=\frac{(\lambda t)^{x}e^{-\lambda t}}{x!}\quad x=0,1,2,\ldots$$

P：表示機率集結函數

X：卜瓦松機率事件可能次數之機率

λ：事件平均發生率

t：時間或空間區段數

舉例而言收費亭，假設於該時段內車輛平均到達率為每小時600輛，若我們關心的是在12秒時間區段(1/5分鐘)之到達車輛數X，故 $t = (1/5)(1/60)=1/300$小時，得 $\lambda t = 600\times(1/300) = 20$

$$\Pr[X=0] = p\left(0;600,\frac{1}{300}\right) = \frac{(2)^0 e^{-2}}{0!} = 0.1353$$

$$p(1) = \frac{(2)^1 e^{-2}}{1!} = 0.2707$$

$$p(2) = \frac{(2)^2 e^{-2}}{2!} = 0.2707$$

$$\vdots$$

$$p(5) = \frac{(2)^5 e^{-2}}{5!} = 0.0361$$

$$\vdots$$

$$p(10) = \frac{(2)^{10} e^{-2}}{10!} = 0.0000382$$

◎參數水準及卜瓦松機率

例如，

1)增加時間區段至30秒，則 $t=(1/2)(1/60)=1/120$，

可得$\lambda t = 600(1/120) = 5$，

$$\Pr[X=2] = p\left(2;600,\frac{1}{120}\right) = \frac{(5)^2 e^{-5}}{2!} = 0.0843$$

2)區段減少為6秒，則 $t=(1/10)(1/60)=1/600$ 時，

可得 $\lambda t = 600(1/600) = 1$，新的機率集結函數為：

$$\Pr[X=2] = p\left(2;600,\frac{1}{600}\right) = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = 0.1839$$

3)上述三種情況中，λ 維持不變而僅改變 t ，則其卜瓦松過程並未改變。一個新設定的λ 不但會影響機率集結函數，亦會影響過程本身。

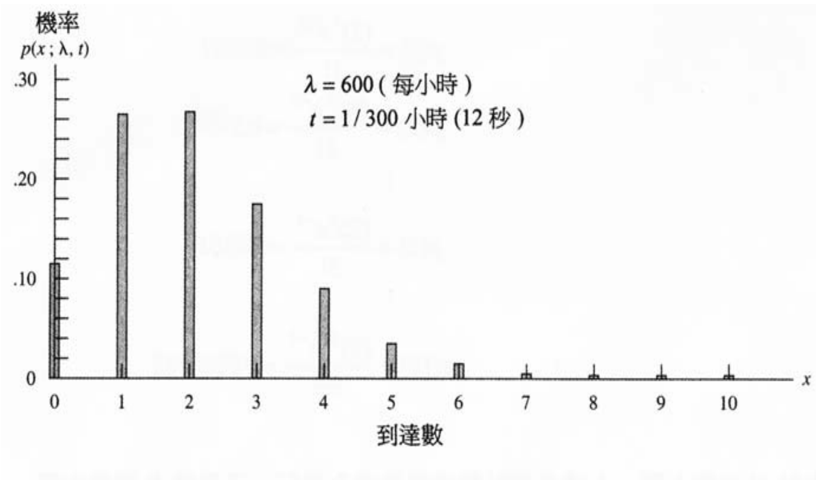

圖 8-2　收費亭車輛到達數之卜瓦松分配

◎卜瓦松過程之重要假設

1. 在某一段特定的時間或特定區域內，事件發生之機率皆相同，此為卜瓦松過程之重要假設。
2. 事件在各段時間或特定區域之發生相互獨立亦為卜瓦松過程之另一個重要假設。

◎卜瓦松過程之重要假設

例題8-1　美國中西部龍捲風發生的情形與卜瓦松過程非常類似，在一個500萬英畝的區域，氣象學家發現每年被龍捲風襲捲的區域為500英畝，即該區域中每年平均遭之龍捲風襲捲的密度為 $\lambda=0.0001$。

考慮一個位於龍捲風帶之8000英畝大小城市，試求在一年中遭龍捲風襲捲一次之機率為何？

設 $t=8{,}000$ 英畝，得 $\lambda t=0.0001(8{,}000)=0.8$。

Pr[恰發生一次]＝$p(1;0.0001,8{,}000)=\dfrac{(0.8)^1e^{-0.8}}{1!}=0.3595$

發生一次以上龍捲風，該發生機率為皆未發生的餘集機率

Pr[沒有發生]＝Pr[X＝0]＝$\dfrac{(0.8)^0e^{-0.8}}{0!}=0.4493$

Pr[會發生]＝1－0.4493＝0.5507

十年內皆不會發生龍捲風之機率

Pr[10年內皆不會發生]＝$(0.4493)^{10}$＝0.000335

因此，在未來十年內至少發生一次龍捲風襲捲之機率為

1－0.000335＝0.999665

◎卜瓦松分配函數及機率表

下式為卜瓦松機率分配函數；

$$p(x;\lambda,t)=\Pr[X\le x]=\sum_{k=0}^{x}p(k;\lambda,t)$$

卜瓦松機率可以查表方式快速求得，附錄表C提供了在　一般水準下之累加卜瓦松機率值。

◎期望值及變異數

$$E(X)=\lambda t$$
$$Var(X)=\lambda t$$

8-2 指數分配（Exponential Distribution）

1. 指數分配提供了在卜瓦松過程中進行之連續（兩）事件，其發生間隔時間或空間的機率。指數分配於評估服務設施之到達時間間隔時，係屬等候理論或等待線應用。
2. 在可靠度評估上，指數分配提供了故障時間的時間的機率。
3. 主要的應用為設定產品存貨，其叫貨時間間隔通常可應用指數分配來表現。

◎指數機率的計算

每個指數分配有一個參數，為**平均處理率**（Mean Process Rate）λ，其表示單位時間內事件發生的次數。以收費站為例，每分鐘λ = 5。指數分配之機率密度函數：

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

當收費站之到達率λ = 5時，$f(t) = 5e^{-5t}$，且當 $t \geq 0$

T 之機率會落於任何區間，其表示式為：

$$\Pr[a \leq b] = \int_a^b f(t)\,dt$$

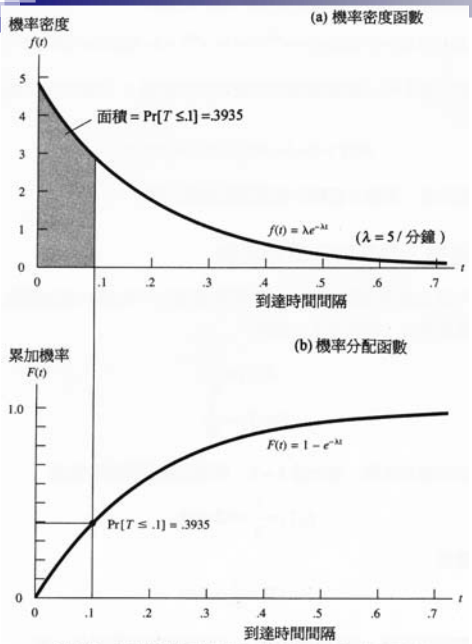

圖 8-3　收費站連續車輛到達時間間隔 T 之指數分配曲線

◎指數機率分配函數：

$$F(t) = \Pr[T \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

◎計算時間T小於或等於6秒（0.1分鐘）之機率：

$$\Pr[T \leq 0.1] = F(0.1) = 1 - e^{-5(0.1)}$$
$$= 1 - 0.6065 = 0.3935$$

◎因每分鐘λ=5，故車輛到達收費站間隔超過1分鐘之機率變得非常的小：

$$\Pr[T > 1] = 1 - F(1) = e^{-5(1)} = 0.0067$$

◎期望值、變異數及百分位數

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

每分鐘λ = 5，則到達間隔期望時間為：

$$E(T) = \frac{1}{5} = 0.2\text{分鐘} \qquad Var(T) = \frac{1}{5^2} = 0.04$$

8-3 伽瑪分配

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx \qquad r > 0$$

符號 Γ 表為伽瑪函數。

◎機率密度函數

伽瑪分配之機率密度函數以下式表示：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

兩個參數 λ 及 r 可為任何非負數值。

在當 $r = 1$ 時，該函數有一特殊的狀況發生：

$$f(x) = \frac{\lambda^1}{\Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x}$$

上式為指數分配的機率密度函數。當 $\lambda = 1/2$ 及 $r = d/2$，伽瑪分配可推導出**卡方分配** (Chi-Square Distribution)。

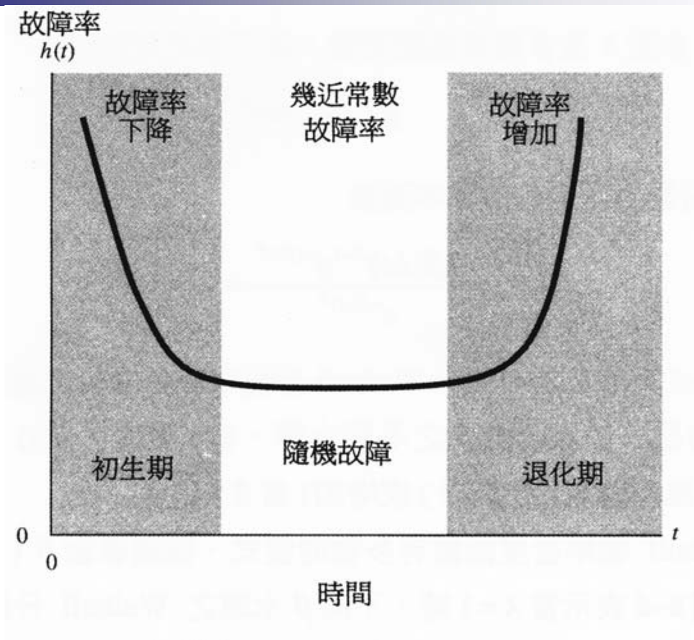

圖 8-4 浴缸型故障率曲線

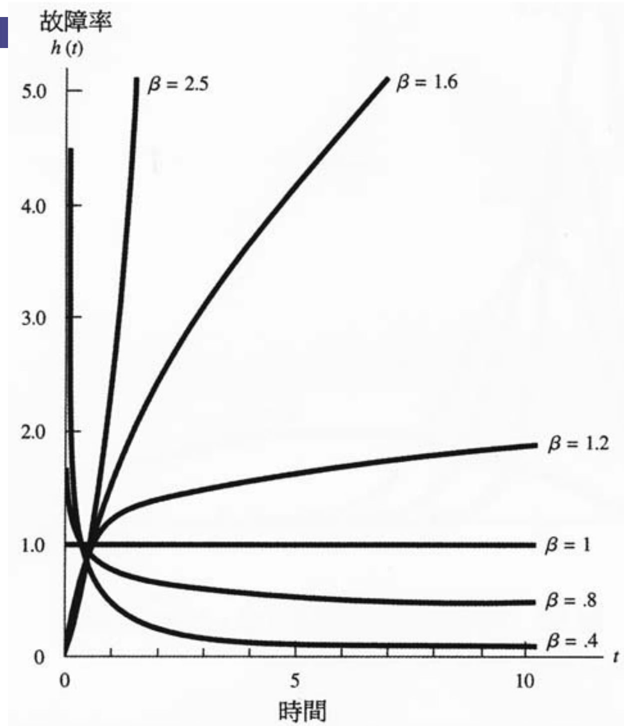

圖 8-5 當 $\lambda = 1$ 時之 Weibull 分配故障率曲線

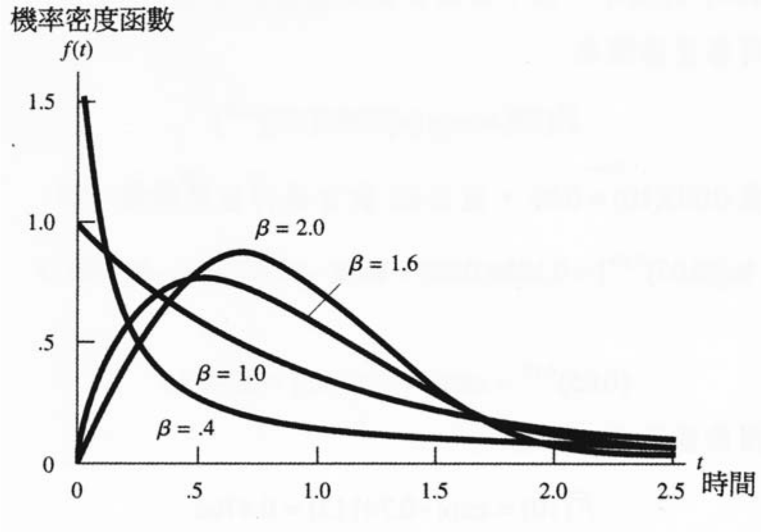

圖 8-6 具有型態參數選擇值 (λ = 1)之 Weibull 分配

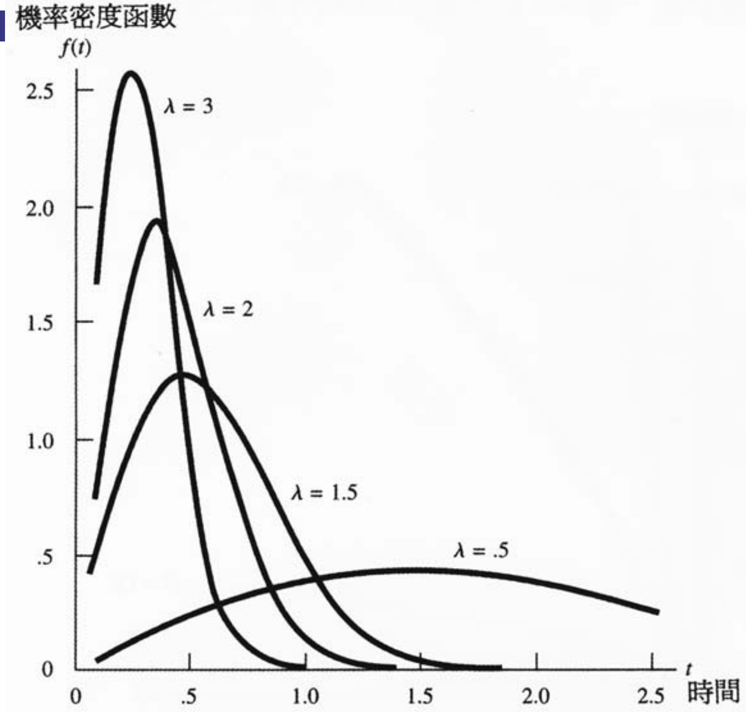

圖 8-7 具有尺度參數選擇值之 (β = 2) Weibull 分配

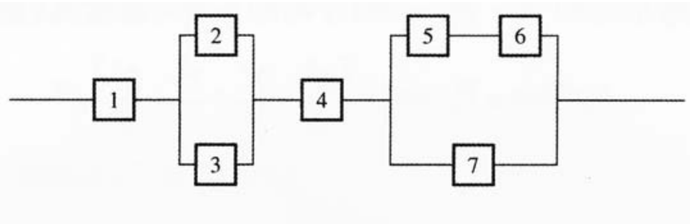

圖 8-8

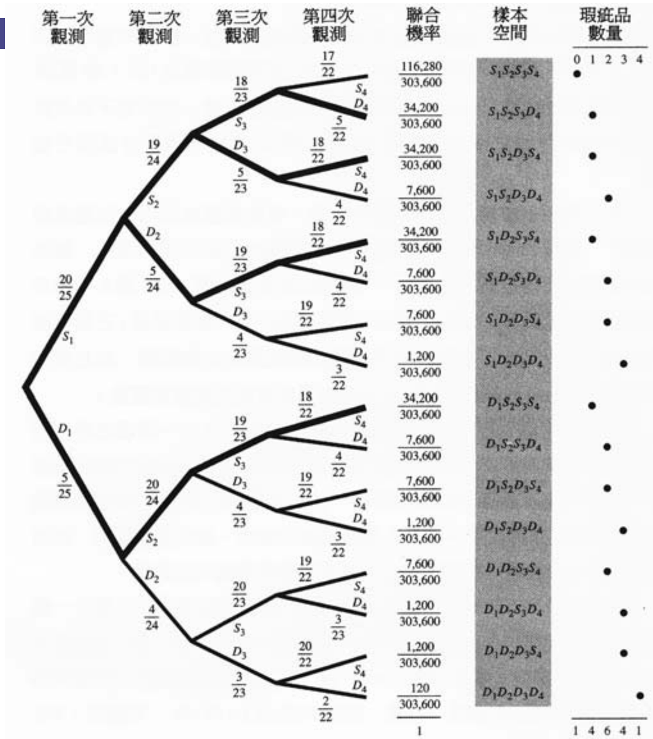

圖 8-9 於小母體中，以不還原方式抽樣之變壓器運送品質測試機率樹狀圖