工 程 統 計

第七章 隨機變數與機率分配

7-1 隨機變數與機率分配

將隨機試驗所有可能結果轉為數值(事件機率)所使用的變數稱為隨機變數(Random Variable)。

◎隨機變數的函數

隨機抽樣檢驗5個電子組件(n=5)，由於檢驗每一個組件其可能結果為良品(G)或瑕疵品(D)，故可能出現的情形(樣本空間)，共有32種。

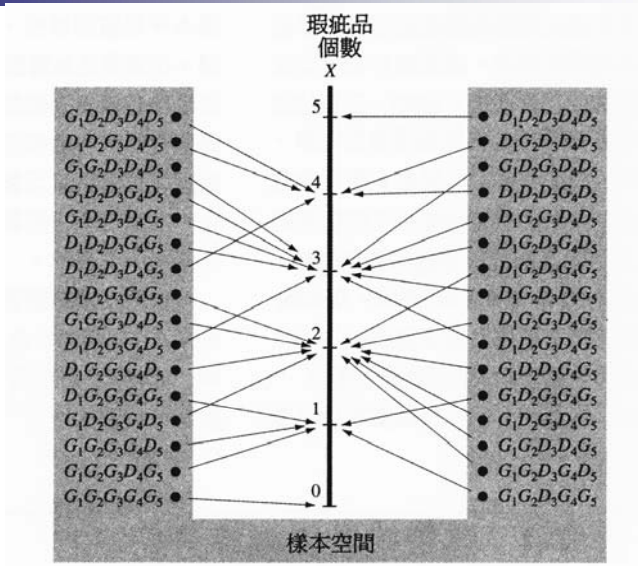


圖 7-1 隨機變數 X（瑕疵品個數）之所有可能出現的樣本空間

由此例可知，每一個隨機變數 X(以大寫表示)，都會有一個相對應可能值 x(以小寫表示)的機率，

也就是機率值是隨機變數的函數值，此為機率分配的觀念。由於機率分配的本質是一函數，故又稱為機率函數(Probability Function)。

◎間斷型的機率分配

(1) 間斷型隨機變數稱為連續型機率變數。

(2)一個隨機變數之各變量的值與其所對應的機率所成的結果，稱為該隨機變數的機率分配(Probability Distribution)。

(3)間段隨機變數的機率函數特稱為機率結函數（Probability Mass Function）或稱為機率質量函數，可表為下式：

$$p(y) = P_r[Y = y] \qquad y = 0, 1, 2 \cdots$$

對每一個y而言，其機率介於0與1之間，即

$$0 \leq p(y) \leq 1$$

其總和必為1 $\sum_{y=0}^{\infty} p(y) = 1$

表 7-1　設備故障的機率分配

可能的故障數 y	機　率 $p(y)$
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5	0.0361
6	0.0121
7	0.0034
8	0.0009
9	0.0002
	1.0000

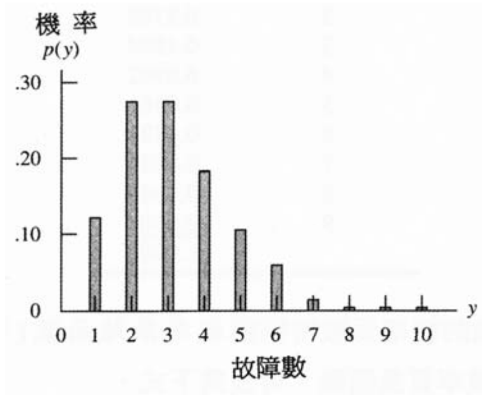


圖 7-2　設備故障的機率集結函數

◎連續型隨機變數

連續分配之機率函數稱為機率密度函數(Probability Density Function)，以 $f(x)$ 函數表示。

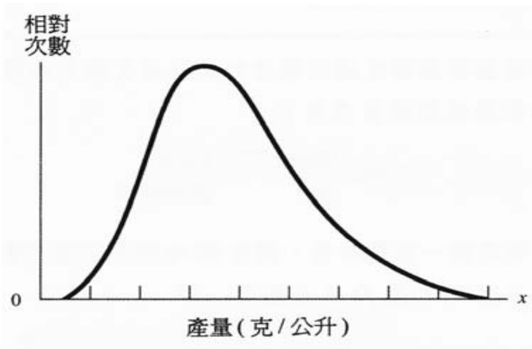


圖 7-3　化學有益成分產量的母體次數分配圖

◎機率密度函數

對於連續型隨機變數 X 之所有可能值範圍而言，

其機率密度函數 $f(x) \geq 0$ 。

而介於 a 與 b 間的面積為

$$\Pr[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

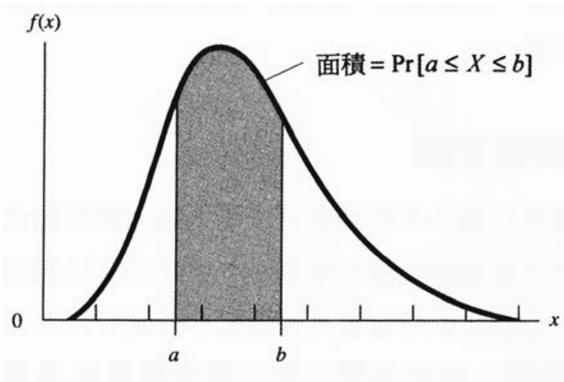


圖 7-4 有益成分產量之機率密度函數曲線

7-2 期望值與變異數

在長期穩定及不斷重覆的試驗，其所有試驗可能結果(發生值)的加權平均數，稱為**期望值**(Expected Value)。

期望值或平均值並無法用來量度機率分配的離散程度，此時則需要以**變異數**(Variance)來測量。

◎期望值

一個間斷型隨機變數X 的期望值

$$E(X) = \sum xp(x)$$

期望值$E(X)$可用以量度隨機變數之集中趨勢(Central Tendency)。

表 7-2 單月內設備故障數之期望值的計算表列

可能的故障數 y	機率 $p(y)$	加權值 $yp(y)$
0	0.1353	0
1	0.2707	0.2707
2	0.2707	0.5414
3	0.1804	0.5412
4	0.0002	0.3608
5	0.361	0.1805
6	0.0121	0.0726
7	0.0034	0.0238
8	0.0009	0.0072
9	0.0002	0.0018
		$E(Y) = 2.0000$

◎隨機變數的變異數與標準差

通常用以量測隨機變數離散程度係為變異數，用以表示每一個個別值與機率分配的中央之差異大小。

x的變異數為隨機變數 $[x-E(X)]^2$ 的期望值，即

$$\text{Var }(X)=\sum[x-E(X)]^2 p(x)$$

標準差(Standard Deviation)，$SD(X)$，可表為下式：

$$SD(X)=\sqrt{Var(X)}$$

表 7-3 單月內效應變異數的計算表列

可能的故障數 y	機率 $p(y)$	離差平方 $[y-E(Y)]^2$	加權值 $[y-E(Y)]^2\,p(y)$
0	0.1353	$(0-20)^2=$ 4.0	0.5412
1	0.2707	$(1-20)^2=$ 1.0	0.2707
2	0.2707	$(2-20)^2=$ 0.0	0.0000
3	0.1804	$(3-20)^2=$ 1.0	0.1804
4	0.0902	$(4-20)^2=$ 4.0	0.3608
5	0.0361	$(5-20)^2=$ 9.0	0.3249
6	0.0121	$(6-20)^2=$16.0	0.1936
7	0.0034	$(7-20)^2=$25.0	0.0850
8	0.0009	$(8-20)^2=$36.0	0.0324
9	0.0002	$(9-20)^2=$49.0	0.0098
			Var(Y)=1.9988

◎期望值與變異數的重要特性

c為任一常數，則下列三個重要特性成立：

1. $E(c)=c$
2. $E(cX)=cE(X)$
3. $E(a+bX)=a+bE(X)$

$$E([X-E(X)]^2)=$$
$$E[X^2-2XE(X)+E(X)^2]=E(X^2)-E(X)^2$$

變異數可改寫為：

$$\text{Var}(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

若a, b與c均為任一常數，則以下變異數的重要特性成立：

1. Var(c)=0
2. $\text{Var}(a+bX)=b^2 Var(X)$

◎連續變數的期望值與變異數

一連續型隨機變數X 的期望值是以積分代替總和，即：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

一連續型隨機變數X 的變異數為離差平方和之總和$[x-E(X)]^2$ 。即：

$$\mathrm{Var}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

上式計算較繁瑣，我們可利用$\mathrm{Var}(x)=E(x^2)-E(x)^2$

$$\mathrm{Var}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-E(X)^2$$

7-3 二項分配

二項分配一般係用以探討某項目成功（發生）次數的機率。當實驗連續且重覆多次進行，且每次試驗中只有兩種可能結果：即成功或失敗，且每次試驗成功機率保持不變，則此種實驗過程稱柏努利過程（Bernoulli Process）。

◎柏努利過程

1. 每一個獨立的隨機實驗稱為一次的試驗(Trial)，

   每次試驗結果僅分為成功或失敗的結果。
2. 每次試驗的成功機率皆保持固定不變。

3. 各個試驗是相互獨立的。

◎二項分配的機率

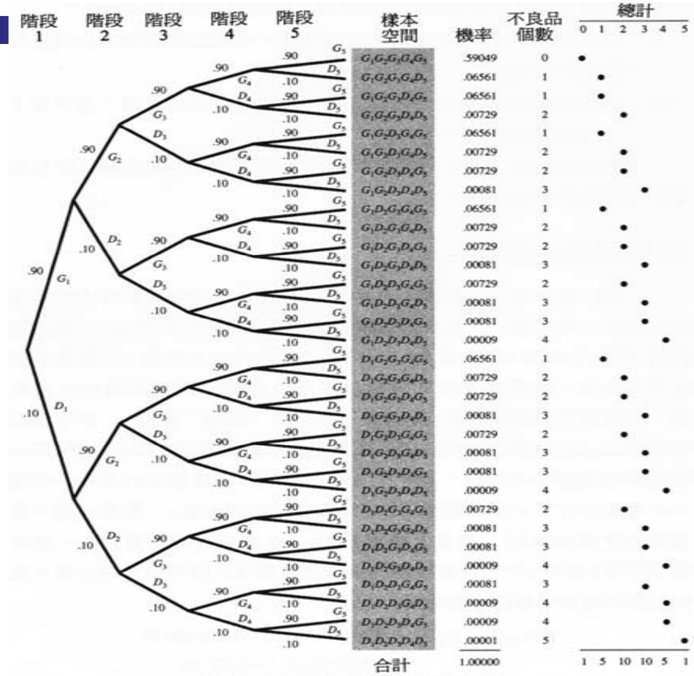


圖 7-5 汽車零件生產線之機率樹圖

◎機率結集函數

二項分配公式 $b(r;n,\pi)$，可表

$$b(r;n,\pi)=C_r^n\pi^r(1-\pi)^{n-r} \quad r=0,1,2,\ldots\ldots,\mathrm{n}$$

$$\Pr[R=2]=b(2;5,0.10)=C_2^5(0.10)^2(1-0.10)^{5-2}$$

$$=10(0.10)^2(0.90)^3$$

$$=0.07290$$

表 7-4 在 $n=5$ 及 $\pi=0.1$ 下之二項分配機率表

不良品個數 r	機　率 $b(r\,;n\,,\pi)$
0	$C_0^5(0.10)^0(0.90)^5=0.59049$
1	$C_1^5(0.10)^1(0.90)^4=0.32805$
2	$C_2^5(0.10)^2(0.90)^3=0.07290$
3	$C_3^5(0.10)^3(0.90)^2=0.00810$
4	$C_4^5(0.10)^4(0.90)^1=0.00045$
5	$C_5^5(0.10)^5(0.90)^0=0.00001$
	1.00000

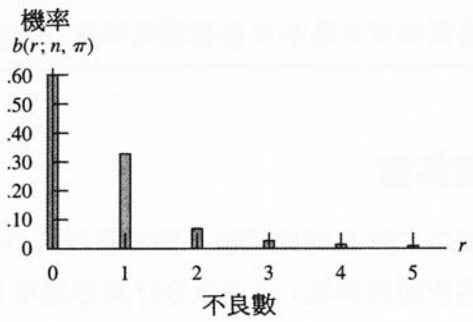


圖 7-6 汽車零件不良數二項分配圖

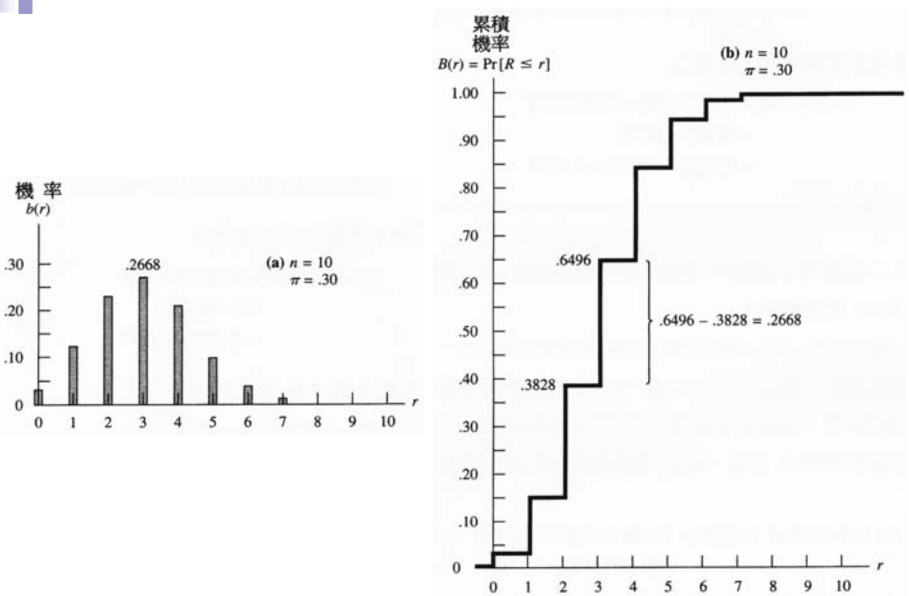


圖 7-7 二項分配之機率集結函數與機率分配函數

7-4 常態分配

常態分配(Normal Distribution)又可稱為**高斯分配**(Gaussian Distribution)。

◎常態分配與母體次數分配曲線

常態分配為統計學最重要的分配之一，當樣本數足夠大(一般而言，$n \geq 30$)，則間斷型機率分配或連續型機率分配，可以用常態分配來逼近。常態分配圖形為一**鐘型(Bell Shape)**對稱的曲線。

母體具平均數 μ 與標準差 σ 之隨機變數 X 的常態分配的機率密度函數為：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

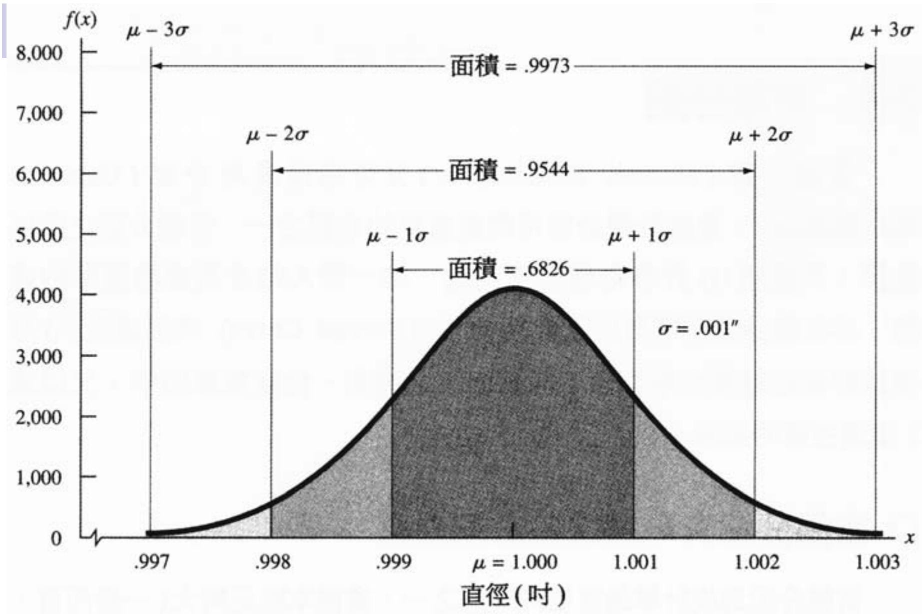
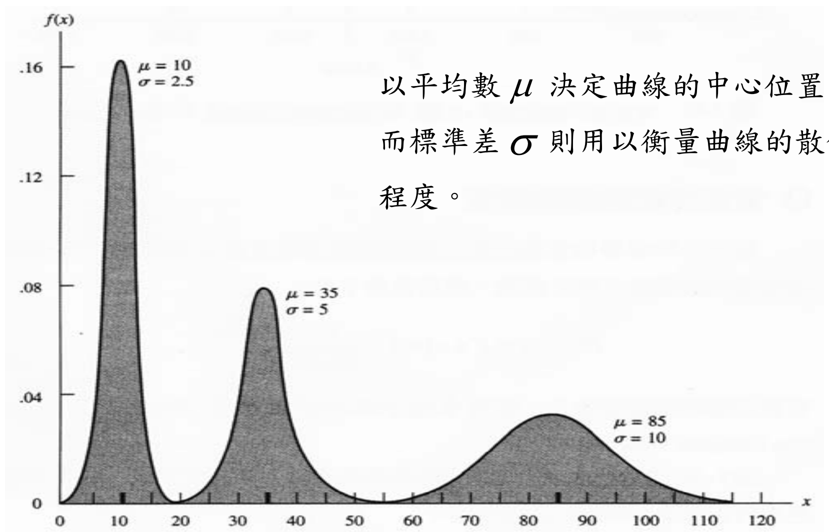


圖 7-8 軸承直徑 1 吋之常態曲線



以平均數 μ 決定曲線的中心位置，而標準差 σ 則用以衡量曲線的散佈程度。

圖 7-9 三種不同平均數與標準差之母體常態曲線

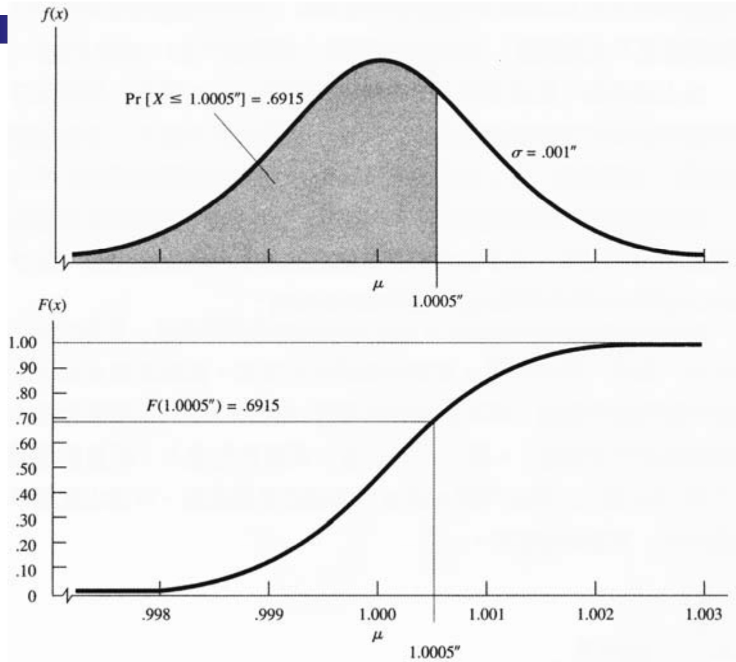


圖 7-10 常態機率密度函數（上圖）與常態機率分配函數（下圖）之曲線

◎常態分配隨機變數

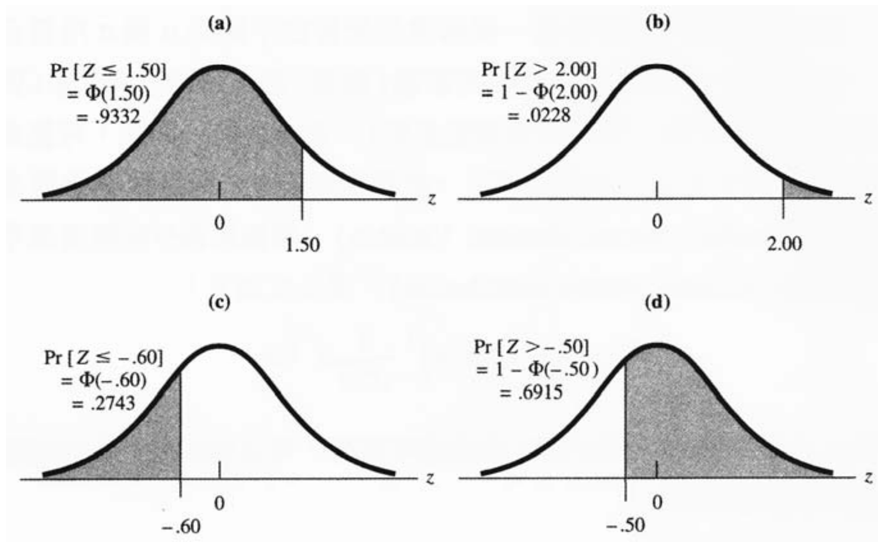
由於小於或等於常態分配之隨機變數某特定值 X 的機率，為該點在常態分配曲線左側之面積，故可表為下式：

$$F(x) = \Pr[\,X \le x\,] = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

◎標準常態分配

可使常態轉換成 $\mu = 0$ 及 $\sigma = 1$ 的標準值**Z**，此時常態變數**Z**稱為**標準常態隨機變數**(Standard Normal Random Variable)，轉換常態分配稱為**標準常態分配**(Standard Normal Distribution)，

$$\Phi(z) = \Pr[Z \le z] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$



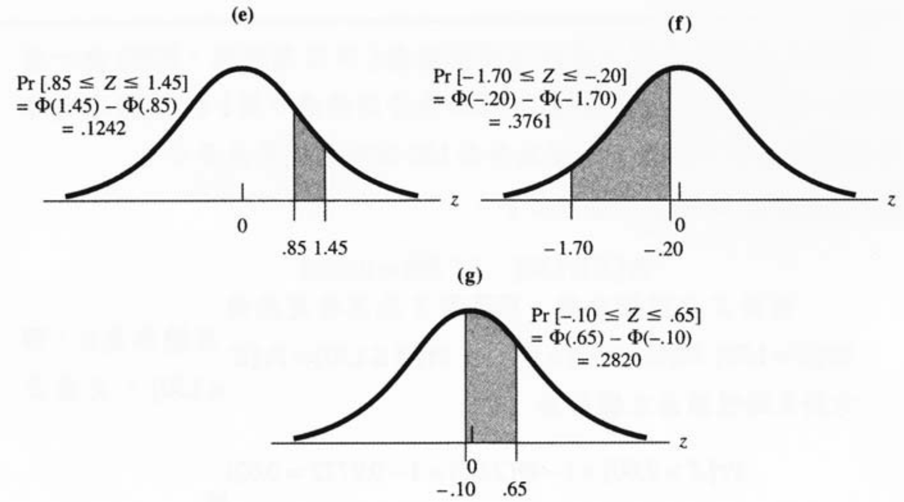


圖 7-11 不同的標準常態隨機變數範圍所對應之面積(機率)

◎任一常態隨機變數的機率

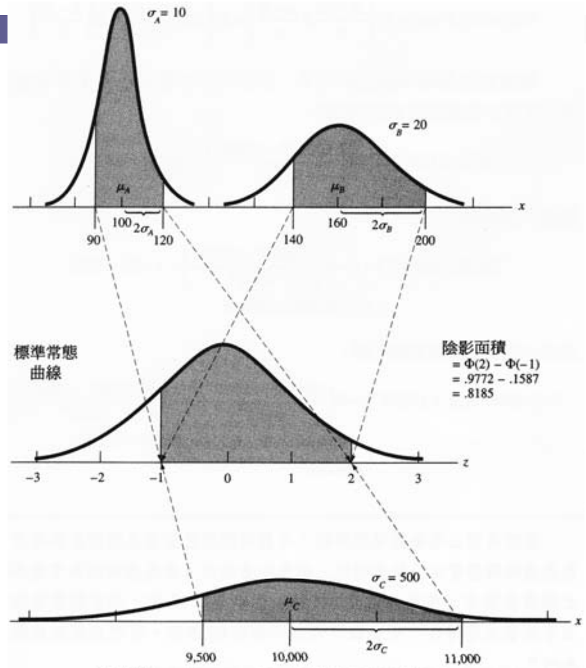


圖 7-12 三個不同 μ 及 σ 的常態分配的標準化過程