工 程 統 計

第六章　機 率

6.1 簡單事件與樣本空間

(Elementary Events and the Sample Space）

隨機試驗之所有可能結果之集合，稱為樣本空間（Sample Space)。

6.1.2 互斥（Certain and Impossible Events）

互斥（Mutual Exclusive）事件例如對事件感到滿足或不滿足，乃屬互斥。

Pr[滿足且不滿足]＝0

6.2 複合事件之機率(Probabilities for Compound Events)

複合事件（Compound Event）係由兩種或兩個以上的簡單事件的組合。

複合事件的運算最主要方式為聯集（Union，或），及交集（Intersection，且）。此外，機率加法法則（Addition Law）與乘法法則（Multiplication Law）。

6.2.1 基本定義之應用(Applying the Basic Definition)

（參考圖6-3）

會員為大學部學生或主修電機系所學生的機率為

Pr[大學部學生 或 主修電機系所學生]

$$= \Pr[UG \text{ 或 } EE] = \Pr[UG \cup EE] = \frac{26}{38}$$

Pr[大學部學生 且 主修電機系所學生]

$$= \Pr[UG \text{ 且 } EE] = \Pr[UG \cap EE] = \frac{5}{38}$$

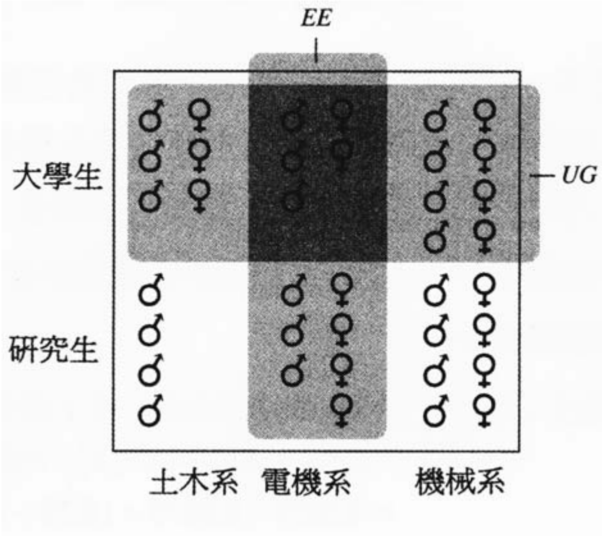

圖 6-3 隨機挑選學會會員之樣本空間

兩個或兩個以上的事件，透過交集（且）或聯集（或）所構成的事件之發生機率，稱為聯合機率（Joint Probability）。

6.2.2 加法法則(The Additional Law)

互斥事件加法法則為下式：

Pr[*A* 或 *B*]=Pr[*A*]+Pr[*B*]

6.2.3 餘事件之加法法則
(Application to Complementary Events)

事件*A*的餘事件（Complementary Event），表示所有不屬於*A*的元素所組成的集合

Pr[*A* 或非 *A*]＝Pr[*A*]+Pr[非*A*]＝1

Pr[*A*]＝1－Pr[非*A*]

6.2.4 加法法則通式(General Addition Law)

加法法則通式求得

Pr[*A* 或 *B*]=Pr[*A*]+Pr[*B*] － Pr[A∩B]

6.2.5 統計獨立（Statistical Independence）

當兩個事件間，任一事件發生與否皆不影響另一事件發生的機率，這項特性稱為統計獨立（Statistically Independent），此二事件為獨立事件（Independent Event）。

6.2.6 獨立事件之乘法法則
(The Multiplication Law for Independent Events)

當事件互為獨立時，聯合事件交集的機率為各事件機率之乘積，可表為下式：

Pr[*A* ∩ *B*]= Pr[*A* 且 *B*]＝ Pr[*A*] ×Pr[*B*]

6.3 條件機率（Conditional Probability）

條件機率（Conditional Probability）是指在另一事件發生的情況下，某一事件將發生的機率。

Pr[下雨 / 烏雲密佈] ＝ 0.90

表示當烏雲密佈發生後，下雨發生機率（此時機率值為0.90）

在B事件發生下，為事件A發生的條件機率之公式定義如下

$$\Pr[A|B]=\frac{\Pr[A\text{且}B]}{\Pr[B]}=\frac{\Pr[A\cap B]}{\Pr[B]}$$

6.3.1 獨立事件之條件機率

(Establishing Independence by Comparing Probabilities)

當$\Pr[A|B]=\Pr[A]$ 或$\Pr[B|A]=\Pr[B]$，

或 $\Pr[A\cap B]=P(A)\bullet P(B/A)=P(A)\bullet P(B)$，

則稱A與B兩事件為統計獨立(Statistically Independent)。

6.4 乘法法則、機率樹及抽樣

6.4.1 乘法法則之通式(The General Multiplication Law)

$$\Pr[A\text{且}B]=\Pr[A\cap B]=\Pr[A]\times\Pr[B|A]$$

因為事件A∩B與B∪A是相同的，故

$$\Pr[A\text{且}B]=\Pr[B]\times\Pr[A|B]$$

6.4.2 機率樹狀圖(The Probability tree Diagram)

機率樹（Probability Tree），是一種分析事件發生過程及機率的圖解方法。利用機率樹可協助我們將聯合事件的關係清楚地表達出來。

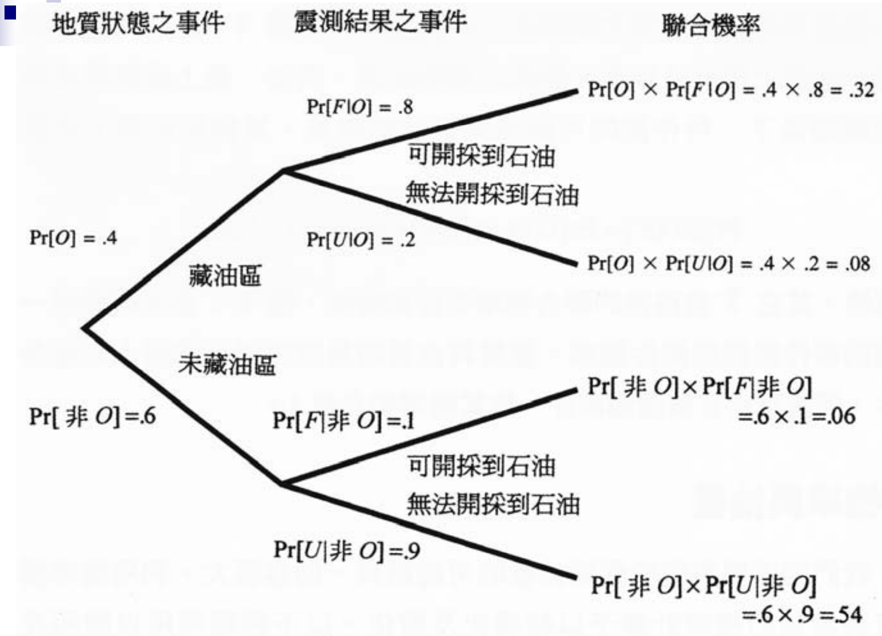

圖 6-4 石油探測的機率樹

6.5 系統可靠度的預測

(Predicting the Reliability of System)

機率的另一個重要的應用是在於以機率來預測整個系統的可靠度（Reliability）。

6.5.1 串聯系統 (System with Series Components)

串聯系統（Series System）是由系統中各單元或元件首尾相接，以使得所有單元均可完全正常運作的一種系統。

此乃因為各單元間列為獨立事件之故，即

$$R_s(t) = R_1(t)R_2(t)\ldots R_n(t)$$

$$R_s(t) = 0.90(0.80)(0.95) = 0.684$$

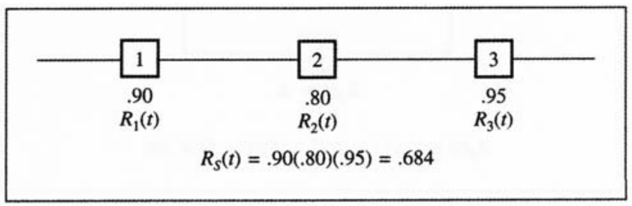

圖 6-7 串聯系統的邏輯圖

6.5.2 並聯系統(System with Parallel Components)

並聯系統（Parallel System）的特徵為：只要系統中有任一單元可保持正常運作，則此系統亦可繼續正常運作。

系統的可靠度等於1減去系統失效的機率。即

$$Rs(t) = 1-[1-R_1(t)][1-R_2(t)]\ldots[1-R_n(t)]$$

已知圖6-8各單元之可靠度為$R_1(t)=0.4$，$R_2(t)=0.5$，$R_3(t)=0.6$，故該系統的可靠度為

$$R_S(t) = 1-(1-0.4)(1-0.5)(1-0.6) = 1-0.12 = 0.88$$

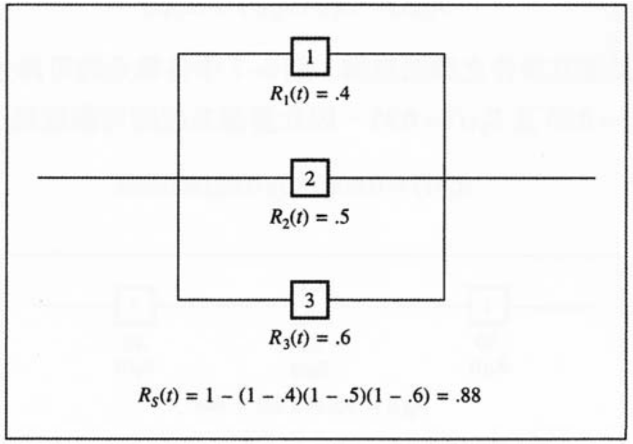

圖 6-8　並聯系統的邏輯圖

6.5.3 系統可靠度的提升 (Increasing System Reliability)

如何提高系統的可靠度，以確保系統的穩定度。通常常考慮的兩種方式為

(1)設法提高系統中各單元的可靠度。

(2)重複使用相同的單元（通常為可靠度較高者），使其構成一並聯的次系統，此時整個系統稱為重覆或多餘系統（Redundant System）。

$$1-[1-R_2(t)][1-R_{2'}(t)] =1-(1-0.8)(1-0.8) =0.96$$

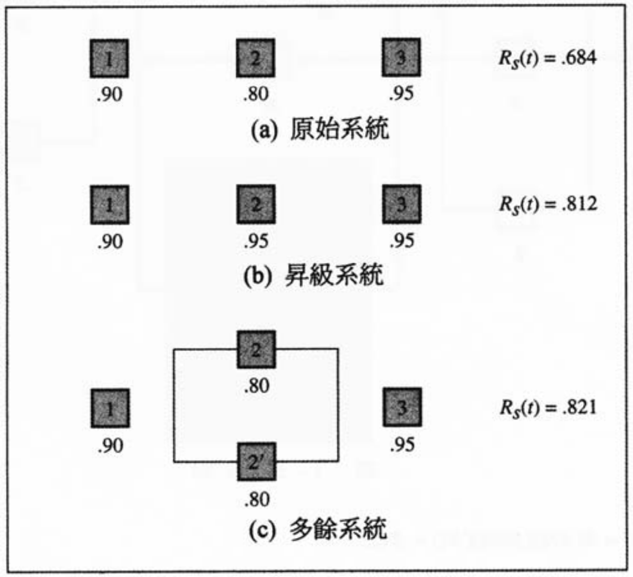

圖 6-9　兩種增加系統可靠度方式的示意圖