CH 3

統計製程管制

Modern Engineering Statistics

工 程 統 計

抽　　樣

所選取出來的樣本，要具有代表母體之特性。

「蒐集資料方法的重要性，並不亞於分析資料」。

為了達到這個目的，隨機抽樣將是最好的方式。

隨機抽樣

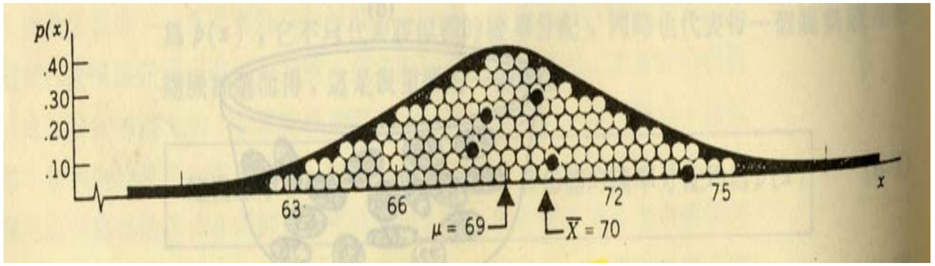
隨機樣本

非常簡單的隨機樣本是指一樣本中n個觀察值 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 彼此均相互獨立，此時，每一 X 的分配即為母體之分配 $p(x)$，亦即：

$$p(x_1) = p(x_2) = \cdots = p(x_n)$$

=母體分配：$p(x)$

因此每一個觀察值都有一母體平均數 μ 與標準差 σ。



自一母體抽出一典型的隨機樣本，此一樣本之平均數將個別的觀察值予以平均化—非極端化。

樣本可靠嗎？

當然，抽樣的目的是對於現行的母體進行統計推論。例如，我們總是希望樣本平均數 $\bar{X}$ 盡可能地接近母體平均數 μ。關於這一點，我們可以下列兩個方式來研究 $\bar{X}$ 如何趨近於 μ。

- 方法一：自母體抽出一樣本，然後計算其平均值，重複做這樣過程，並不斷計算出新的平均值X，最後觀察每一樣本X之變動情形，此即為X的抽樣分配。
- 方法二：用數學推導來求得X的抽樣分配。

樣本平均數的動差

樣本平均數 $\bar{\mathrm{X}}$ 之定義為：

$$\bar{\mathrm{X}} \equiv \frac{1}{\mathrm{n}}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n]$$

由於 $\bar{\mathrm{X}}$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的線性組合，

故 $\bar{\mathrm{X}}$ 本身亦為隨機變數。

！！那麼它的變動情形為何？

！！期望值與變異數又各為若干呢？

$\bar{X}$ 之期望值為：

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)]$$

每一觀察值 X 之母體分配為 $p(x)$，而母體平均數為 μ，故 $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = \mu$，因此：

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}[\mu + \mu + \cdots + \mu]$$

$$= \frac{1}{n}[n\mu] = \mu$$

$$\boxed{E(\bar{X}) = \mu}$$

$$\operatorname{var}\bar{X}=\frac{1}{n^2}\left[\operatorname{var}(X_1)+\operatorname{var}(X_2)+\cdots+\operatorname{var}(X_n)\right]$$

由於每一觀察值 X 存在一母體分配 $p(x)$，其中變異數為 σ^2，故：

$$\operatorname{var}\bar{X}=\frac{1}{n^2}\left[\sigma^2+\sigma^2+\cdots+\sigma^2\right]$$

$$=\left[n\sigma^2\right]=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\bar{X}\text{ 的標準差 }=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

此一 $\bar{X}$ 與 μ 之離差乃表示估計誤差，即通常所稱之標準誤(standard error)或SE：

標準誤 $\bar{X}$ $$SE=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母體平均值＝ 抽樣平均值＋抽樣誤差

統計學的重要應用之一 ：

A：統計品質管制（Statistical Quality Control)，管制工程本身需處理產品研發、製程操作及公共設計的本質。

B：統計製程管制（Statistical Process Control)，乃是應用統計原理用以監控與檢驗製程是否為符合設計的穩定狀態的管制方法。

3.1 管制圖（The Control Chart）

(1) 在製程階段抽樣並觀察試驗是否落於先前訂定之合理界限內，可用以檢定製程是否處在管制狀態中（In Control)，並可用於調查引起製程變異的原因。

(2) 若連續的樣本落於管制界限內且造成產品變異的原因屬於機遇（Chance）或隨機，則稱此階段製程是在管制狀態下。若有樣本落於管制界限外，則製程可能是因存有可尋原因（Assignable Cause）或稱為非隨機性原因而致使其發生變異。

3.1.1 統計的初步措施（Statistical Preliminaries）

1. 圖3-1所示為樣本平均值統計製程管制之概念圖。
2. 以 $\sigma_{\overline{X}}$ 代表樣本平均值之標準誤（Standard Error of the Sample Mean），此值與 σ 及樣本數有關。
3. 根據經驗法則，可知約有95％樣本平均值落於 $\mu \pm 2\sigma_{\overline{X}}$ 管制界限內（即母體平均值的正負2個標準誤），以及約有99%之樣本平均值落於 $\mu \pm 3\sigma_{\overline{X}}$ 管制界限內。

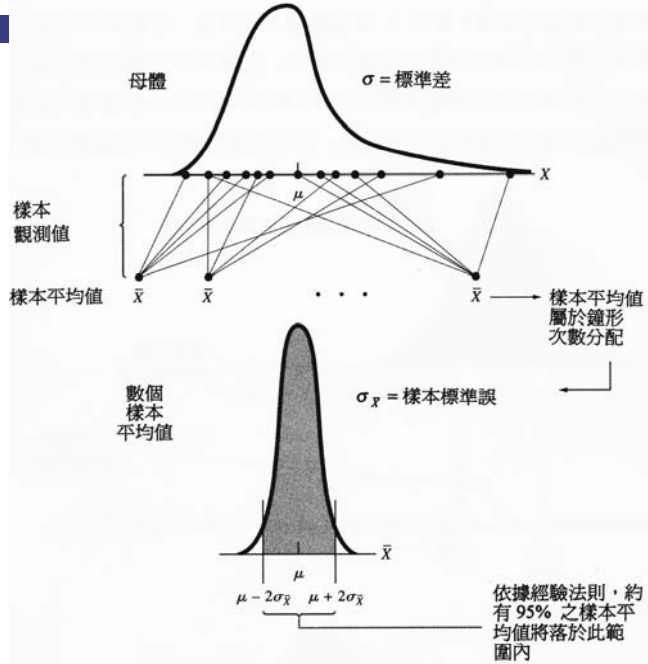


圖 3-1　以樣本平均值作為統計製程管制之概念圖

3.1.2 統計管制之概念(Concept of Statistical Control)

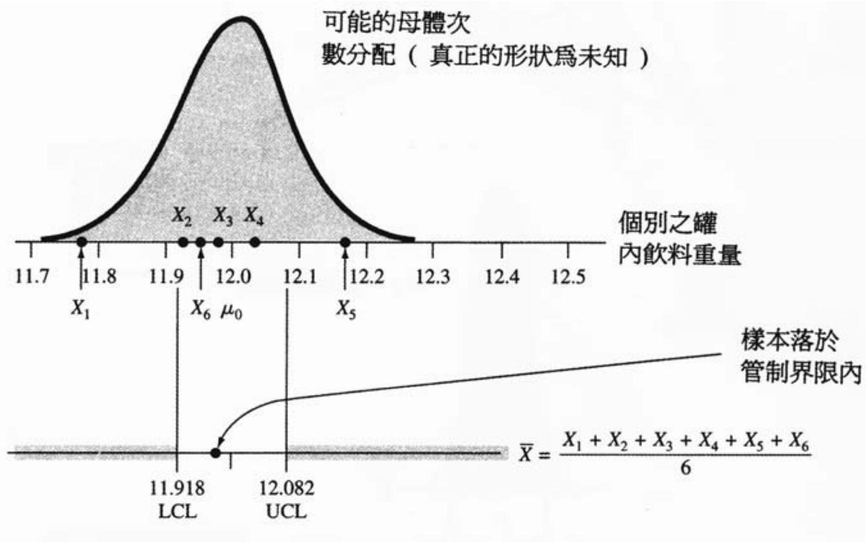
1. 統計管制乃藉由各時期製程之樣本結果作為評量製程的參考，其結果與對應措施主要有二：

(1) 製程在管制狀態中（In Control）則無需採取改善對策。

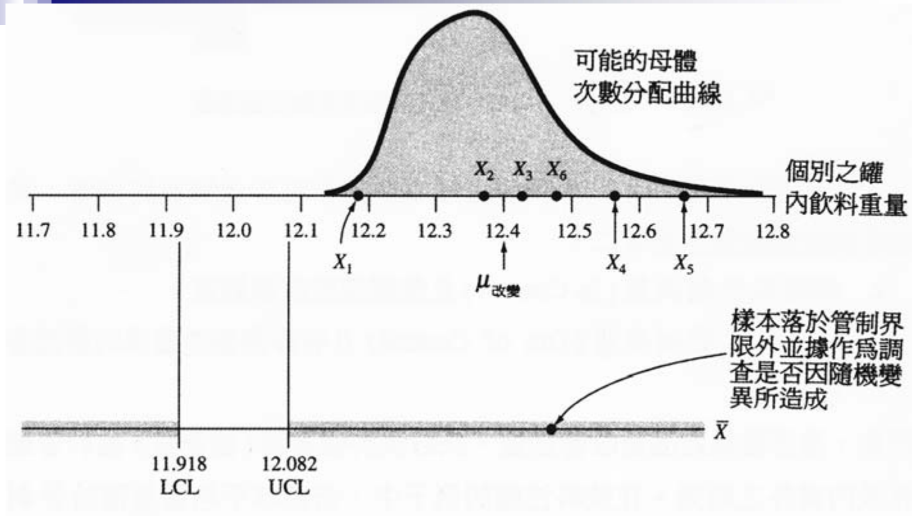
(2) 製程不在管制狀態中（Out of Control）且有非隨機性變異的原因發生，則需採取改善措施。

2. 若樣本平均重量落於管制下限（Lower Control Limit）LCL及管制上限（Upper Control Limit）UCL內，則LCL≦ $\overline{X}$ ≦UCL，稱製程在管制狀態中；反之，稱製程不在管制狀態中。

- 圖3-2(a)表示可能的母體次數分配曲線及樣本重量之結果。當以6個抽樣樣本為考量，可得其平均值　落於管制界限內，表示製程在管制狀態。
- 圖3-2(b)表示飲料超注的結果，由於樣本平均值超過管制上限（即 $\overline{X}$＞UCL)



(a) 製程在管制狀態中



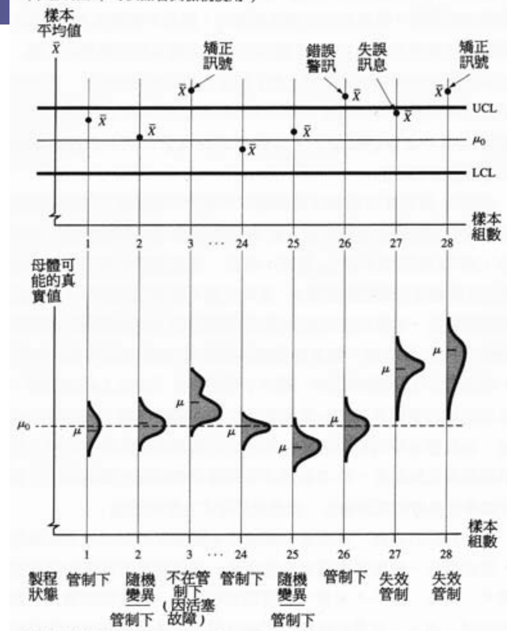
(b) 製程不在管制狀態中

圖 3-2 飲料注入罐中之兩種不同製程結果

3.1.3 管制圖 (The Control Chart)

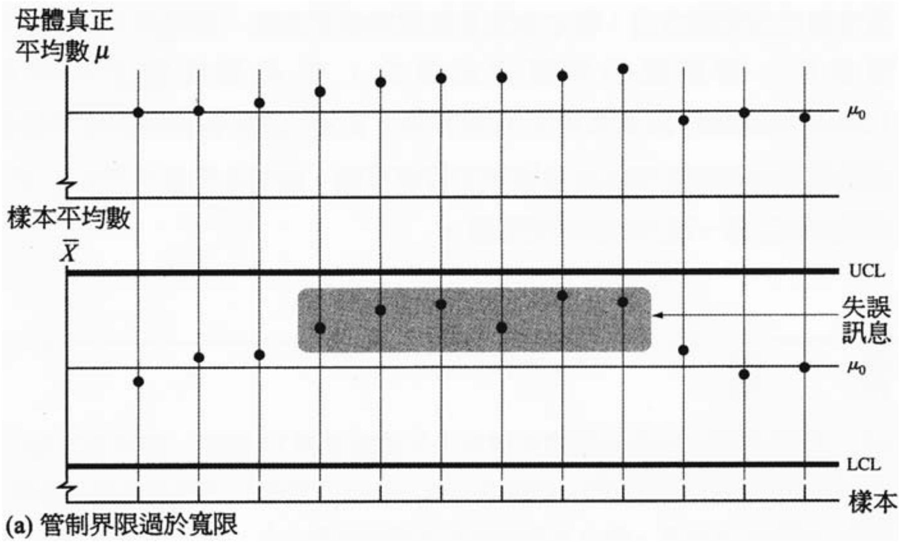
1. 管制圖（Control Chart）係一種依抽樣數目、時間，與連續樣本所繪製的品質特性圖示，用於檢查出品質問題的一有用工具。

(a) 管制圖（ 可供品管員檢視使用 ）



(b) 在不同時期抽樣下可能之母體分配

圖 3-3 用於說明未知的真正母體特性的管制圖



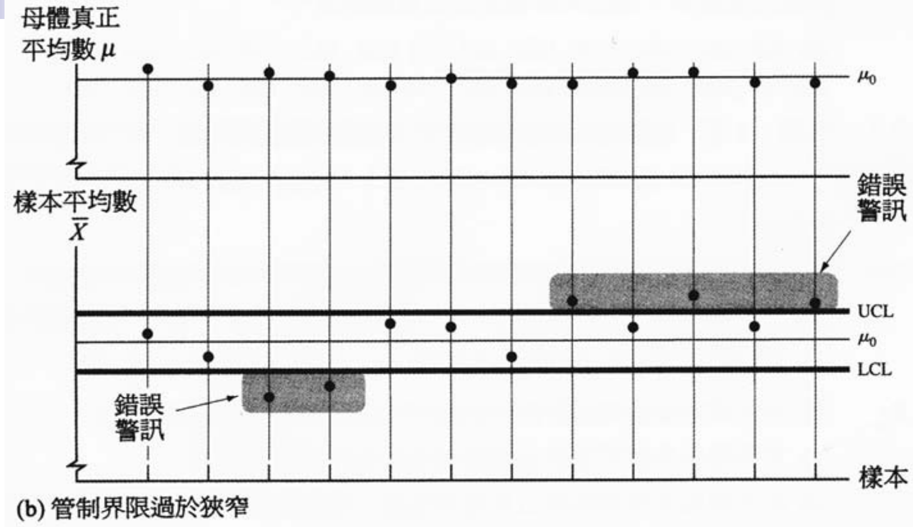


圖 3-4　管制界限之兩種極端的情形

管制圖種類

- 計量管制圖(3-2節)
- 計量管制圖(3-3節)

3-2:計量資料的管制圖

- 計量值管制圖主要用於管制計量型資料之平均數---平均數管制圖

  與
- 變異性---管制製程之變異

  樣本偏差(Sample Standard deviation)管制圖

  樣本全距(Sample range)管制圖

3-2:計量資料的管制圖

平均數之管制界限計算—母體(規格)已知

母體已知下平均數管制圖之管制界限計算

$$\text{LCL} = \mu_0 - SL\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad \text{UCL} = \mu_0 + SL\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

其中：

μ_0 = 母體平均數

σ_0 = 母體標準差

SL = 標準差個數 (2或3個)

3-2:計量資料的管制圖

- 2個標準差:所有樣本平均數約有95%落於管制界限
- 3個標準差:所有樣本平均數約有99.7%落於管制界限

3-2:計量資料的管制圖

全距及標準差管制圖之管制界限計算 母體(規格)已知

母體已知下全距及標準差管制圖之管制界限計算

全距：

$$\text{LCL} = d_2\sigma_0 - SLd_3\sigma_0 \quad \text{UCL} = d_2\sigma_0 + SLd_3\sigma_0$$

標準差：

$$\text{LCL} = c_4\sigma_0 - SLc_5\sigma_0 \quad \text{UCL} = c_4\sigma_0 + SLc_5\sigma_0$$

其中：

μ_0 = 母體平均數

σ_0 = 母體標準差

SL = 標準差個數 (2或3個)

式中常數： d_2, d_3, c_4, c_5

3-2:計量資料的管制圖

全距及標準差管制圖之管制界限計算 母體(規格)已知

- 例:當樣本數為6，查表附錄K (page 583)
- 得知常數d_2=2.534　d_3=0.848
- 母體標準差σ_0=0.1
- 取95% 信心水準SL=2。故:

  LCL=2.543(0.1)-2(0.848)(0.1)=0.084
  UCL=2.543(0.1)+2(0.848)(0.1)=0.423

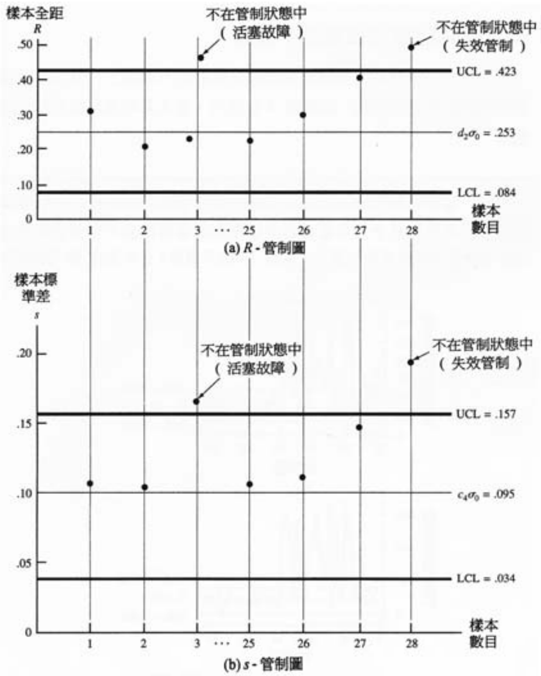


圖 3-5 飲料注罐例子之全距與標準差的管制圖

3-2:計量資料的管制圖

以管制圖查出製程之不穩定(例3-1)

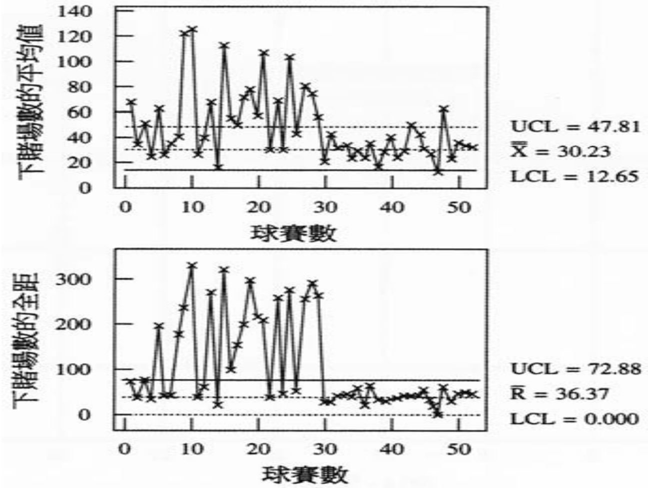


圖 3-6 用以證明球賽賄賭的管制圖

3-2:計量資料的管制圖

平均數管制圖之管制界限計算
母體(規格)未知

母體未知下的平均數管制圖之管制界限計算

$$\text{LCL} = \bar{\bar{X}} - SL\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \text{UCL} = \bar{\bar{X}} + SL\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

其中 $\bar{\bar{X}}$ = 樣本總平均數

SL = 標準差個數 (2或3)

母體估計量

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

式中：

$\bar{R}$ = 樣本之平均全距

d_2 = 全距的轉換常數值

3-2:計量資料的管制圖

平均數管制圖之管制界限計算
母體(規格)未知

- 例:
- 某鋼廠生產鋼薄片，為確保產品厚度=1/12寸厚。
- 確保品質進行製程管制，程序如下:
  - 每一小時抽出五片鋼片
  - 連續進行25小時，抽樣結果如下表
  - 取95% 信心水準SL=2。
  - 因真實母體未知，故需由樣本資料估計

表 3-1　鋼片厚度

樣本組	鋼片厚度(英吋)					各組平均數 $\bar{X}$	全距 R	標準差 s
1	.0494	.0489	.0508	.0485	.0501	.0495	.0023	.0009
2	.0514	.0520	.0510	.0469	.0485	.0500	.0051	.0022
3	.0481	.0504	.0486	.0496	.0500	.0493	.0023	.0010
4	.0508	.477	.0481	.0487	.0458	.0482	.0050	.0018
5	.0491	.0443	.0533	.0498	.0480	.0489	.0090	.0032
6	.0458	.0508	.0492	.0478	.0526	.0492	.0068	.0026
7	.0473	.0527	.0494	.0511	.0521	.0505	.0054	.0022
8	.0525	.0492	.0492	.0475	.0495	.0496	.0050	.0018
9	.0533	.0524	.0516	.0490	.0487	.0510	.0046	.0021
10	.0502	.0502	.0513	.0497	.0514	.0506	.0017	.0008
11	.0507	.0485	.0456	.0475	.0485	.0482	.0051	.0018
12	.0509	.0477	.0520	.0486	.0479	.0494	.0043	.0019
13	.0467	.0516	.0510	.0498	.0507	.0500	.0049	.0019
14	.0503	.0471	.0490	.0515	.0490	.0494	.0044	.0016
15	.0506	.0485	.0515	.0498	.0494	.0500	.0030	.0011
16	.0501	.0495	.0475	.0475	.0487	.0487	.0026	.0012
17	.0518	.0499	.0499	.0471	.0521	.0502	.0050	.0020
18	.0479	.0506	.0520	.0506	.0493	.0501	.0041	.0015
19	.0481	.0480	.0517	.0512	.0503	.0499	.0037	.0017
20	.0479	.0506	.0492	.0523	.0502	.0500	.0044	.0016
21	.0521	.0497	.0523	.0516	.0521	.0516	.0026	.0011
22	.0475	.0478	.0494	.0524	.0517	.0498	.0049	.0022
23	.0499	.0448	.0511	.0473	.0456	.0485	.0055	.0022
24	.0500	.0500	.0492	.0502	.0509	.0501	.0017	.0006
25	.0483	.0502	.0476	.0468	.0489	.0484	.0034	.0013
						1.2411	.1068	.0423

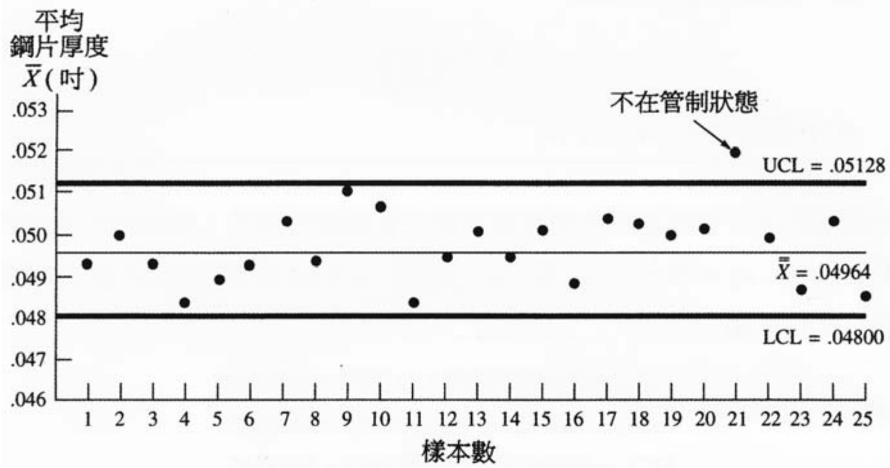


圖 3-7　鋼片厚度之平均數管制圖（$SL = 2$）

3-2:計量資料的管制圖

全距及標準差管制圖之管制界限計算

母體(規格)未知

母體情形未知下的全距及標準差管制圖之管制界限計算

全距：

$$\mathrm{LCL} = \bar{R} - SL\hat{\sigma}_R \qquad \mathrm{UCL} = \bar{R} + SL\hat{\sigma}_R$$

其中　$\bar{R}$ = 樣本之平均全距

　　SL = 標準差個數(2或3)

其 R 之標準差估計量為

$$\hat{\sigma}_R = \bar{R}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)$$

標準差：

$$\mathrm{LCL} = \bar{s} - SL\hat{\sigma}_s \qquad \mathrm{UCL} = \bar{s} + SL\hat{\sigma}_s$$

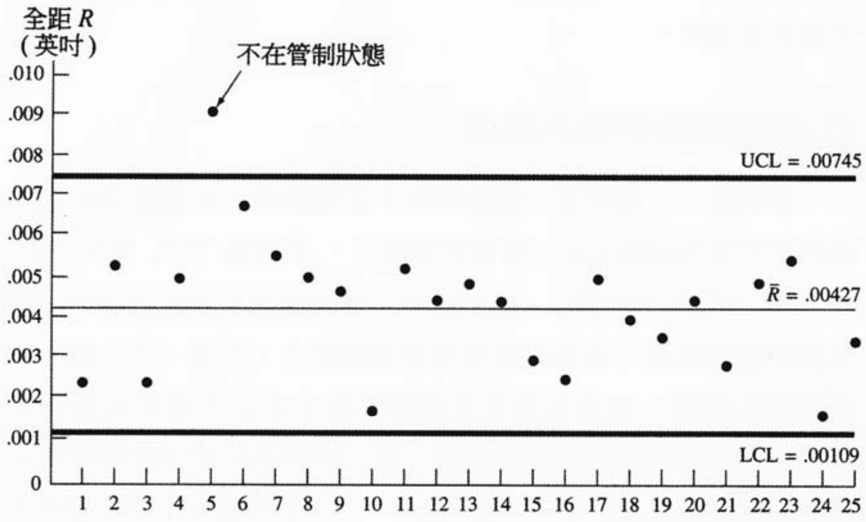
其中　$\bar{s}$ = 樣本標準差之平均數

　　SL = 標準差個數(2或3)

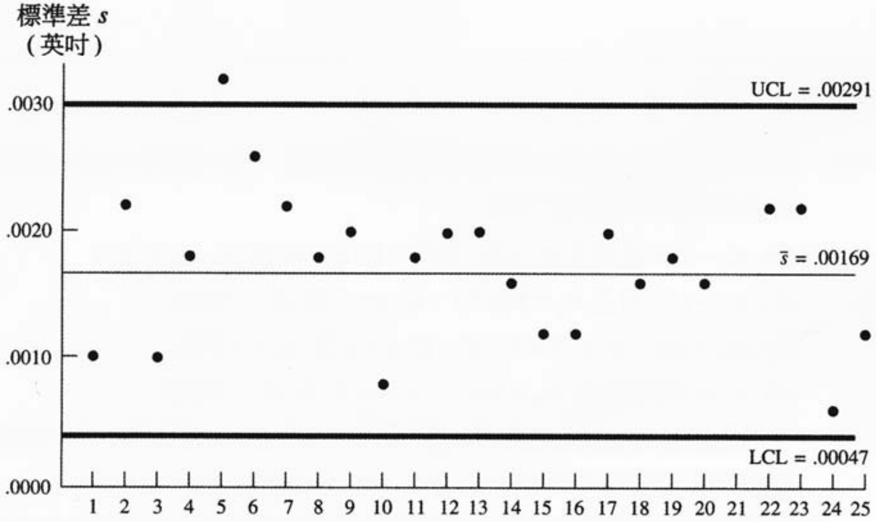
其 s 之標準差估計量為

$$\hat{\sigma}_s = \bar{s}\left(\frac{c_5}{c_4}\right)$$

式中常數值 d_2，d_3，c_4，c_5



(a) R - 管制圖 ($SL = 2$)



(b) s - 管制圖 ($SL = 2$)

圖 3-8 鋼片厚度之 R 管制圖與 s 管制圖